جامعة البعث	امتحان مقرر نظرية الاحتمالات	الاسم :
كلية العلوم	لطلاب السنة الثالثة رياضيات	المدة : 90 دقيقة
قسم الرياضيات	الفصل الدراسي الأول للعام 2015 – 2016	الدرجة : 100

السؤال الأول (40 درجة):

بفرض أنَّ X , Y متغيران عشوائيان لهما دالة كثافة مشتركة معطاة بالشكل:

$$f\left(x , y\right)=\frac{e^{-\frac{y}{2x}}e^{-\frac{x}{2}}}{4x} \;,\; x>0 \;,\; y>0$$

، والمطلوب:

1) عيِّن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير X. **2)** عين دالة الكثافة الشرطية لـ Y حيث X.

3) عيِّن $M_{Y/X}\left(t\right)$, $V\left(Y / X\right)$, $E\left(Y / X\right)$, $F\left(y / x\right)$, $P\left(Y > 2 / X = 2\right)$.

4) بفرض أنَّ $X_1, X_2, ..., X_n$ عينة عشوائية لـ X، عندئذٍ عيِّن التوزيع الاحتمالي للمتغيِّر $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ اعتماداً على الدالة المولدة، ثمَّ عيِّن الدالة المولدة للعزوم المركزية لـ T. **5)** بفرض أنَّ X_1, X_2 عينة عشوائية لـ X عندئذٍ:

أولاً: عيِّن التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين $U = \frac{X_1}{X_2}$, $V = X_2$.

ثانياً: عيِّن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير $Z = \min\left\{X_1, X_2\right\}$.

ثالثاً: عيِّن الدالة المولدة للعزوم المشتركة لـ X_1, X_2.

السؤال الثاني(60 درجة):

أ) بفرض $P\left(x , y\right)=\left(\frac{1}{16}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{x+y} \;;\; x=0,1,2,....... \;,\; y=0,1,2,.......$ توزيع احتمالي مشترك للمتغيرين X و Y والمطلوب :

1) هل X و Y مستقلين؟ **2)** عين التوزيع الاحتمالي لـ $Z = \min\left\{X , Y\right\}$. **3)** عيِّن كل من التوقع والتباين والدالة المميزة والدالة التوزيعية لـ Z.

ب) بفرض X , Y متغيران عشوائيان بواسونيان مستقلان لهما نفس الوسيط $\lambda = 2$، والمطلوب:

1) حساب $P\left(X = k / X + Y\right)$, $E\left(X = k / X + Y\right)$, $V\left(X = k / X + Y\right)$, $V\left(3X + 4Y\right)$ و $E\left(3X + 4Y\right)$, $COV\left(2X , 2Y\right)$, $\rho\left(2X , 2Y\right)$. **2)** عيِّن كل من الدالة المولدة والدالة التراكمية والدالة المولدة للعزوم العاملية والدالة المولدة للعزوم اللامركزية حول النقطة $y = 2$ للمتغير Y .

ج) ليكن X متغير عشوائي مستمر منتظم على المجال $\left[-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right]$ والمطلوب : **1)** عين دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير $Y = 2\tan x$ **2)** عين الدالة التوزيعية لـ Y **3)** عين الدالة المميزة لـ Y . **4)** بفرض $Y_1, Y_2, ... , Y_n$ عينة عشوائية لـ Y عندئذٍ عين الدالة المميزة لـ $\overline{Y}$ ، ثم عين التوزيع الاحتمالي لـ $\overline{Y}$. **5)** احسب $P\left(-2 < \overline{Y} < 2\right)$.

6) بفرض Z متغير عشوائي مستقل عن Y وله نفس التوزيع عندئذٍ عين الدالة التوزيعية المشتركة لـ Y و Z ، **7)** احسب $P\left(Y < 2 , Z < 2\right)$.

حمص في 18 / 2 /2016	انتهت الأسئلة	مدرس المقرر : د. هيثم فرح

السؤال الأول:

أولاً:

$$f_X(x)=\int_0^\infty f(x,y)dy=\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{y}{2x}}e^{-\frac{x}{2}}}{4x}dy=\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{y}{2x}}}{2x}dy=\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left[-e^{-\frac{y}{2x}}\right]_0^\infty=$$

$$=\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}[0+1]=\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\quad\Rightarrow\quad\boxed{f_X(x)=\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\ ,x>0}$$

ثانياً:

$$f_{Y/X}(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{e^{-\frac{y}{2x}}e^{-\frac{x}{2}}}{4x}\frac{1}{\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}}=\frac{1}{2x}e^{-\frac{1}{2x}y}\quad ,y>0$$

ثالثاً:

من الواضح أن المتغير الشرطي Y حيث X من النمط الأسي بالوسيط $\lambda=\frac{1}{2x}$ وبالتالي فإن الدالة المولدة له هي:

$$M_{Y/X}(t)=\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{-1}=\left(1-\frac{t}{\frac{1}{2x}}\right)^{-1}=(1-2x\,t)^{-1}$$

والتباين له هو:

$$V(Y/X)=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{(1/2x)^2}=4x^2$$

والتوقع له هو:

$$E(Y/X)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{(1/2x)}=2x$$

والدالة التوزيعية له هي:

$$F(y/x)=1-e^{-\lambda y}=1-e^{-\frac{1}{2x}y}\quad ,\ y>0$$

وكما أنَّ:

$$P(Y>2/X=2)=1-P(Y\le 2/X=2)=1-F_{Y/X=2}(2)=1-\left(1-e^{-\frac{1}{2(2)}(2)}\right)=e^{-\frac{1}{2}}$$

رابعاً:

$$M_T(t)=M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t)=\prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)=\prod_{i=1}^n M_X(t)=(M_X(t))^n=\left[\left(1-\frac{t}{1/2}\right)^{-1}\right]^n=(1-2t)^{-n}$$

وبالتالي فإن التوقع للمتغير T والذي هو من النمط الغماوي بالوسيطين $\alpha = \frac{1}{2}\ , \lambda = n$ هو:

$$E(T) = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{n}{1/2} = 2n$$

ومنه فالدالة المولدة للعزوم المركزية هي:

$$M_{(T-ET)}(t) = e^{-t\,ET} M_T(t) = e^{-2nt}\left[(1-2t)^{-n}\right] = \left[e^{2t}(1-2t)\right]^{-n}$$

خامساً:

أ) بما أن X_1, X_2 عينة عشوائية لـ X فإن :

$$f(x_1,x_2) = f(x_1).f(x_2) = e^{-\frac{1}{2}x_1} e^{-\frac{1}{2}x_2} = e^{-\frac{1}{2}(x_1+x_2)} \ ; x_1 > 0 \, , x_2 > 0$$

ولدينا $U = \frac{X_1}{X_2}$ و $V = X_2$ ومنه فإن :

وبالتالي فإن $X_2 = V \ , \ X_1 = UV$:

$$\frac{\partial X_1}{\partial U} = V \ , \ \frac{\partial X_1}{\partial V} = U \ , \frac{\partial X_2}{\partial U} = 0 \ , \ \frac{\partial X_2}{\partial V} = 1 \ \Rightarrow \ J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial U} & \frac{\partial X_1}{\partial V} \\ \frac{\partial X_2}{\partial U} & \frac{\partial X_2}{\partial V} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V & U \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = V \Rightarrow |J| = |V| = V$$

ونعلم أن :

$$f(u,v) = f(x_1,x_2)|J|\Big|_{\substack{x_1=uv \\ x_2=v}} = e^{-\frac{1}{2}(x_1+x_2)} v \Big|_{\substack{x_1=uv \\ x_2=v}} = v\, e^{-\frac{1}{2}(uv+v)} = v\, e^{-\frac{1}{2}v(u+1)} \ ; u > 0 \ , v > 0$$

ب)

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z < z) = 1 - P(Z \ge z) = 1 - P\left(\min\{X_1, X_2\} \ge z\right) = \\
&= 1 - P(X_1 \ge z \ , X_2 \ge z) = 1 - P(X_1 \ge z)P(X_2 \ge z) = \\
&= 1 - \left[1 - P(X_1 < z)\right]\left[1 - P(X_2 < z)\right] = 1 - \left[1 - P(X < z)\right]\left[1 - P(X < z)\right] = \\
&= 1 - \left[1 - P(X < z)\right]^2 = 1 - \left[1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{2}z}\right)\right]^2 = 1 - \left[e^{-\frac{1}{2}z}\right]^2 = 1 - e^{-z} \ ; z > 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}F_Z(z) = \frac{d}{dz}\left[1 - e^{-z}\right] = e^{-z} \ ; z > 0$$

ج)

$$M_{(X_1,X_2)}(t_1,t_2) = M_{X_1}(t_1)M_{x_2}(t_2) = M_X(t_1)M_X(t_2) = (1-2t_1)^{-1}(1-2t_2)^{-1} \Rightarrow$$

$$\boxed{M_{(X_1,X_2)}(t_1,t_2) = \frac{1}{(1-2t_1)(1-2t_2)}}$$

السؤال الثاني :

أ) - 1) من الواضح أن:

$$P(x,y)=\left(\frac{1}{16}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{x+y}=\left[\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{x}\right]\left[\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{y}\right]=P_X(x).P_Y(y)$$

$$P_X(x)=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{x}\ ;\ x=0,1,2,\ldots\ldots.\quad ,P_Y(x)=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{y}\ ;\ y=0,1,2,\ldots\ldots.$$

وبالتالي فإن X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين علماً أن كل منهما متغير عشوائي من الهندسي بالوسيط $p=\frac{1}{4}$.

2) حيث أن $X\ ,Y$ متغيران عشوائيان مستقلان ولهما التوزيع الهندسي بالوسيط $p=\frac{1}{4}$ فإن :

$$P_Z(z)=P\{Z=z\}=P\{Z\ge z\}-P\{Z>z\}=P\{\min\{X,Y\}\ge z\}-P\{\min\{X,Y\}>z\}=$$

$$=P\{X\ge z\ ,Y\ge z\}-P\{X>z\ ,Y>z\}$$

$$=P\{X\ge z\}P\{Y\ge z\}-P\{X>z\}P\{Y>z\}$$

$$=[1-P\{X<z\}][1-P\{Y<z\}]-[1-P\{X\le z\}][1-P\{Y\le z\}]$$

$$=[1-F_X(z-1)][1-F_Y(z-1)]-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

$$=\left[1-\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{z}\right)\right]\left[1-\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{z}\right)\right]-\left[1-\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{z+1}\right)\right]\left[1-\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{z+1}\right)\right]$$

$$=\left(\frac{3}{4}\right)^{2z}-\left(\frac{3}{4}\right)^{2z+2}=\left(\frac{3}{4}\right)^{2z}\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{2}\right)=\left(\frac{9}{16}\right)^{z}\left(1-\frac{9}{16}\right)=\left(\frac{7}{16}\right)\left(\frac{9}{16}\right)^{z}\ ;z=0,1,2,\ldots$$

من الواضح أن المتغير العشوائي $Z=\min\{X,Y\}$ هو متغير عشوائي هندسي بالوسيط $p=\frac{7}{16}$.

3)

$$E(Z)=\frac{q}{p}=\frac{9/16}{7/16}=\frac{9}{7}\qquad ,\quad V(Z)=\frac{q}{p^2}=\frac{9/16}{(7/16)^2}=\frac{144}{49}$$

$$\psi_Z(t)=\frac{p}{1-qe^{it}}=\frac{7/16}{1-(9/16)e^{it}}=\frac{7}{16-9e^{it}}$$

$$F_Z(z)=1-q^{z+1}=1-(9/16)^{z+1};\ z=0,1,2,\ldots..$$

ب)

1) إن الحدث $\{X+Y=n\}$ يكتب بالشكل :

$$\{X+Y=n\}=\{X=0,Y=n\}\cup\{X=1,Y=n-1\}\cup\cdots\cdots\cup\{X=n,Y=0\}=$$

$$=\bigcup_{i=0}^{n}\{X=i,Y=n-i\}$$

وهذه الأحداث مستقلة مثنى مثنى ، ومتنافية مثنى مثنى فإن :

$$P\{X+Y=n\}=P\left[\{X=0,Y=n\}\cup\{X=1,Y=n-1\}\cup\cdots\cdots\cup\{X=n,Y=0\}\right]=$$

$$=P\left\{\bigcup_{i=0}^{n}\{X=i,Y=n-i\}\right\}=\sum_{i=0}^{n}P\{X=i,Y=n-i\}=\sum_{i=0}^{n}P\{X=i\}P\{Y=n-i\}=$$

$$\sum_{i=0}^{n}P_X(i)P_Y(n-i)=\sum_{i=0}^{n}\left[e^{-2}\frac{2^i}{i!}\right]\left[e^{-2}\frac{2^{(n-i)}}{(n-i)!}\right]=e^{-4}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{2^i 2^{(n-i)}}{i!(n-i)!}\right)=$$

$$=e^{-4}\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{n!}{i!(n-i)!}\right)2^i 2^{(n-i)}=e^{-4}\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}C_i^n 2^i 2^{(n-i)}=e^{-4}\frac{1}{n!}(2+2)^n=e^{-4}\frac{4^n}{n!};n=0,1,2,..$$

أي أن مجموع متغيرين عشوائيين بواسونيين لهما نفس الوسيط $\lambda=2$ هو متغير عشوائي بواسوني جديد وسيطه $\lambda=4$ أي مجموع الوسيطين .

$$P\{X=k/X+Y=n\}=\frac{P\{X=k,X+Y=n\}}{P\{X+Y=n\}}=\frac{P\{X=k,Y=n-k\}}{P\{X+Y=n\}}$$

$$=\frac{\left[e^{-2}\frac{2^k}{k!}\right]\left[e^{-2}\frac{2^{(n-k)}}{(n-k)!}\right]}{e^{-4}\frac{4^n}{n!}}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{2^k 2^{(n-k)}}{4^n}\right)=C_k^n\frac{2^k 2^{(n-k)}}{4^k 4^{(n-k)}}=$$

$$=C_k^n\left(\frac{2^k}{4^k}\right)\left(\frac{2^{(n-k)}}{4^{(n-k)}}\right)=C_k^n\left(\frac{2}{4}\right)^k\left(\frac{2}{4}\right)^{n-k}\quad\Rightarrow$$

$$P\{X=k/X+Y=n\}=C_k^n\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\quad;\ k=0,1,2,....,n$$

واضح أن المتغير العشوائي الشرطي هو متغير عشوائي من النمط الثنائي وسيطاه n , $p=\frac{1}{2}$ ومنه نجد أن التوقع الشرطي هو توقع لمتغير عشوائي ثنائي أي أن :

$$E\{X=k/X+Y=n\}=np=n\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}n$$

والتباين له هو:

$$V\{X=k/X+Y=n\}=npq=n\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}n$$

$$E(X)=\lambda=2,\ E(Y)=\lambda=2\ ,V(X)=\lambda=2,V(Y)=\lambda=2$$

$$V(3X+4Y)=V(3X)+V(4Y)=9V(X)+16V(Y)=9(2)+16(2)=50$$

$$E(3X+4Y)=3E(X)+4E(Y)=3(2)+4(2)=14$$

$$COV(2X,2Y)=4COV(X,Y)=4(0)=0$$

$$\rho(2X,2Y)=\rho(X,Y)=0$$

2) Y متغير عشوائي من النمط البواسوني بالوسيط $\lambda = 2$ وبالتالي فإنَّ:

الدلة المولدة لـه هي:

$$M_Y(t) = e^{-\lambda(1-e^t)} = e^{-2(1-e^t)}$$

الدالة التراكمية له هي:

$$K_Y(t) = \ln[M_Y(t)] = \ln\left[e^{-2(1-e^t)}\right] = -2(1-e^t)$$

الدالة المولدة للعزوم العاملية له هي:

$$M_{\frac{Y\ \ln t}{t}}(t) = M_Y(\ln t) = e^{-2(1-e^{\ln(t)})} = e^{-2(1-t)}$$

الدالة المولدة للعزوم اللامركزية حول النقطة $y = 2$

$$M_{(Y-2)}(t) = E\left(e^{t(Y-2)}\right) = e^{-2t}E\left(e^{tY}\right) = e^{-2t}M_Y(t) = e^{-2t}\left[e^{-2(1-e^t)}\right] = e^{-2(1+t-e^t)}$$

ج)

1) بما أن X متغير عشوائي مستمر منتظم على المجال $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ فإن دالة كثافته الاحتمالية تعطى بالشكل :

$$f_X(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\pi} \quad ; \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

ولدينا :

$$y = 2\tan x \Rightarrow \tan x = \frac{y}{2} \Rightarrow x = \arctan\left(\frac{y}{2}\right) \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{2}{4+y^2}$$

وبالتالي فإن :

$$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|_{x=\varphi^{-1}(y)} = \frac{1}{\pi}\left|\frac{2}{4+y^2}\right|_{x=\arctan\left(\frac{y}{2}\right)} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{4+y^2} \quad ; -\infty < y < +\infty$$

ومن الواضح أن Y هو متغير عشوائي من النمط كوشي بالوسيطين $a = 2\ ,\ b = 0$.

2) إن الدالة التوزيعية للمتغير العشوائي Y من النمط كوشي بالوسيطين $a = 2\ ,\ b = 0$ تعطى بالعلاقة :

$$F_Y(y) = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{1}{2} \quad , \ -\infty < y < +\infty$$

3) إن الدالة المميزة للمتغير العشوائي Y من النمط كوشي بالوسيطين $a = 2\ ,\ b = 0$ تعطى بالعلاقة :

$$\psi_Y(t) = e^{-a|t|} = e^{-2|t|}$$

4) لدينا أن $Y_1 , Y_2 , ... , Y_n$ عينة عشوائية لـ Y والمطلوب تعيين الدالة المميزة لـ $\overline{Y}$ ، ثم تعيين التوزيع الاحتمالي $\overline{Y}$.

$$\psi_{\overline{Y}}(t) = \psi_{\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)/n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \psi_{Y_i}\left(\frac{t}{n}\right) = \prod_{i=1}^{n} \psi_Y\left(\frac{t}{n}\right) = \left[\psi_Y\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n = \left[e^{-2\left|\frac{t}{n}\right|}\right]^n =$$

$$= \left[e^{-2n\frac{|t|}{n}}\right] = e^{-2|t|} = \psi_Y(t)$$

وهذا يعني أن لـ $\overline{Y}$ نفس الدالة المميزة لـ Y ، ومنه فإن للمتغير العشوائي $\overline{Y}$ نفس التوزيع الاحتمالي لـ Y ومنه فإن $\overline{Y}$ هو متغير عشوائي من النمط كوشي بوسيطين الأول $a = 2$ والثاني $b = 0$.

5) حساب $P\left(-2 < \overline{Y} < 2\right)$:

$$P\left(-2 < \overline{Y} < 2\right) = F_{\overline{Y}}(2) - F_{\overline{Y}}(-2) = F_Y(2) - F_Y(-2) =$$

$$= \left(\frac{1}{\pi}\arctan(1) + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{\pi}\arctan(-1) + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\arctan(1) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

6) لدينا Z متغير عشوائي مستقل عن Y وله نفس التوزيع والمطلوب تعين الدالة التوزيعية المشتركة لـ Y و Z ، ثم حساب $P(Y > 2 , Z > 2)$.

بما أن Y و Z مستقلان فإن الدالة التوزيعية المشتركة هي جداء للدوال التوزيعية :

$$F(y, z) = F_Y(y) F_Z(z) = \left(\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{1}{2}\right)$$

7)

$$P(Y < 2 , Z < 2) = P(Y < 2) P(Z < 2) = F_Y(2) F_Z(2) =$$

$$= \left(\frac{1}{\pi}\arctan(1) + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\arctan(1) + \frac{1}{2}\right) = \left[\frac{3}{4}\right]^2 = \frac{9}{16}$$

انتهت الأجوبة

أ.أحمد حاتم أبو حاتم

0947075489